

# Per una geometria descrittiva attuale

Riccardo Migliari

La geometria descrittiva è la scienza che insegna a rappresentare, modellare e ricostruire nello spazio le forme a tre dimensioni che sono oggetto della invenzione in architettura, nella ingegneria e nel disegno industriale. Benché abbia ricevuto il suo nome da Gaspard Monge, intorno al 1795, questa scienza è tra le più antiche, tra quante fanno parte del patrimonio culturale dell'umanità, e comprende al suo interno importanti teorie e applicazioni quali la prospettiva, la teoria delle ombre e del chiaroscuro, il disegno dell'ordine architettonico, il taglio delle pietre e dei legnami, il disegno degli ingranaggi e molte altre ancora che qui non occorre ricordare. La geometria descrittiva è perciò, da sempre, uno strumento formativo essenziale nei *curricula* degli studenti architetti, ingegneri e designer.

Nell'ultimo quarto dello scorso secolo, con il rapido sviluppo delle tecnologie informatiche (hardware e software), i problemi che avevano prima una soluzione esclusivamente grafica hanno trovato una soluzione digitale, vale a dire una soluzione di natura essenzialmente matematica che però si manifesta nei modi della geometria descrittiva classica e cioè attraverso immagini. Lo sviluppo di questi algoritmi ha anche arricchito il novero delle teorie di carattere geometrico descrittivo estendendo, ad esempio, il repertorio delle curve e delle superfici impiegate nella progettazione dalle coniche e dalle quadriche alle NURBS, il repertorio degli effetti della luce sui corpi che è possibile rappresentare con cura, dal semplice chiaroscuro della legge di Lambert, ai riflessi, ai punti brillanti, alle trasparenze degli attuali rendering, etc.

A fronte di questa evoluzione, tuttavia, gli studi e, conseguentemente, l'insegnamento della geometria descrittiva, restano radicati alle forme antiche e questo radicamento provoca una pericolosa dicotomia tra l'insegnamento tradizionale, non più attuale ma ricco della sua storia, e l'insegnamento delle tecniche informatiche, attuale, ma ridotto a mera esecuzione di comandi programmati, avulsi da qualsiasi contesto teorico e perciò anche incontrollati.

Urge dunque un rinnovamento della geometria descrittiva che, considerando il forte impatto del-

l'informatica in questo settore, può essere visto come una vera e propria rifondazione.

## *Sulla necessità di rinnovare l'insegnamento*

L'interesse per il problema del rinnovamento degli studi nell'ambito della geometria descrittiva è testimoniato dai saggi che molti ricercatori hanno dedicato a questo tema negli ultimi dieci anni, soprattutto all'estero. Bisogna osservare, tuttavia, che la maggior parte di questi saggi si rivolgono all'ambito didattico, quasi che possa darsi un insegnamento avulso dai contenuti e dalle forme della relativa scienza. Ci si chiede, in sintesi, come conciliare l'insegnamento della geometria descrittiva e quello del CAD, invece di chiedersi come rifondare la scienza che sarà poi insegnata.

E la differenza tra questi due modi di vedere non è di poco conto.

Si legga ad esempio il volume di Standiford, K. and D. Standiford (2006), *Descriptive geometry: an integrated approach using AutoCAD*, un manuale che gode negli U.S.A. di una discreta fortuna editoriale, essendo già alla seconda edizione. Questo manuale illustra i problemi elementari della geometria descrittiva impiegando un noto programma per il disegno e la modellazione informatica, alcuni comandi costruiti ad hoc per mezzo degli strumenti di programmazione integrati e alcune tecniche di e-learning; e sviluppa l'idea, dichiarata nella prefazione, di portare lo studente a familiarizzare con il software, e perciò con il prodotto prescelto, mentre si appropria dei fondamenti della geometria descrittiva. Dunque, mentre da un lato gli Autori avvertono il bisogno di non dimenticare quei fondamenti del pensiero progettuale, che formano la padronanza dello spazio, dall'altro rinunciano alle tecniche grafiche tradizionali, per avvalersi, peraltro in modo estremamente riduttivo, della tecnologia informatica. Anche considerando l'obiettivo minimalista di questo lavoro, e cioè quello di educare allievi di corsi base, non si può fare a meno di criticare questo approccio, che finisce per umiliare la geometria descrittiva e anche il CAD e, infatti:

· la geometria descrittiva, con la sua teoria, la sua storia, le sue vaste applicazioni, viene ridotta a un

*1/ Costruzione dei piani tangenti ad una sfera, che passano per una retta data, nel manuale di Gino Fano (1925).*

pretesto per imparare le tecniche di rappresentazione programmate in questo o quel prodotto commerciale;

la formazione della capacità di padroneggiare le forme tridimensionali, passa attraverso il codice delle proiezioni ortogonali associate, come in passato, anziché sfruttare le potenzialità offerte dallo spazio virtuale a tre dimensioni, simulato per mezzo del software;

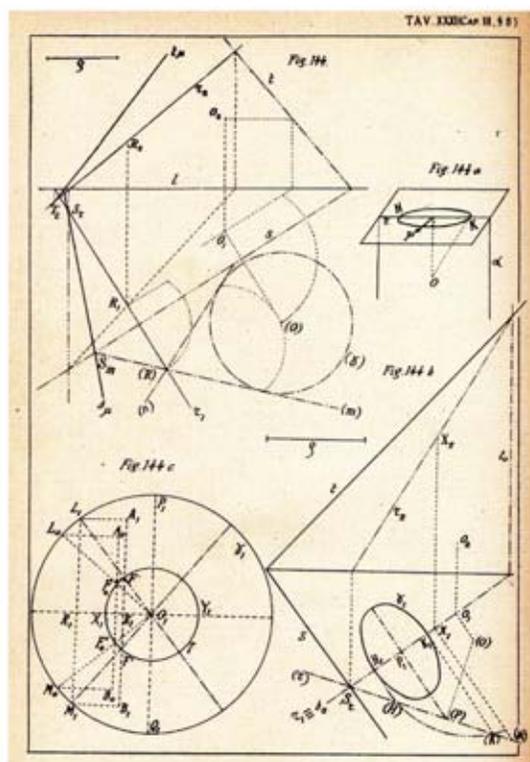
lo studente viene indotto a credere che il suo lavoro consisterà nel costruire le proiezioni di un oggetto per poi scoprire (non è chiaro quando) che dette proiezioni si possono ottenere automaticamente dal modello tridimensionale.

Peraltro, un diverso modo di vedere le cose trova qualche riscontro anche nella base della ricerca internazionale, ad esempio nel lavoro di C. Jiannan (1998), *Kernel problems of the modernization of engineering graphics education* (Journal for Geometry and Graphics, Volume 2, No. 1, 65-70) che, già dieci anni orsono, si pone il problema del rinnovamento della geometria descrittiva, come scienza, prima ancora che come materia di insegnamento; e, ancora, nella lucida analisi di Hellmuth Stachel (s.d.), *Descriptive Geometry In Today's Engineering Curriculum* (Inst. of Discrete Mathematics and Geometry, Vienna University of Technology). Stachel, in particolare, così riassume lo stato dell'arte: premesso che la geometria descrittiva è ancora e di gran lunga il mezzo migliore per formare la capacità di controllare mentalmente lo spazio, come dimostrano le ricerche di K. Suzuki (2002), sono da considerarsi obsoleti: 'le complicate costruzioni manuali, le difficili dimostrazioni teoriche; la teoria che insegna a costruire le immagini di particolari oggetti tridimensionali; sono ancora necessari: la padronanza dello spazio, la capacità di comprendere configurazioni spaziali a partire da immagini bidimensionali, la capacità di orientamento con particolare riferimento ai sistemi di coordinate locali, la conoscenza della geometria solida, la capacità creativa di trovare soluzioni, le applicazioni della geometria descrittiva, la capacità di produrre immagini convincenti; e, infine, sono ulteriormente richiesti: la capacità di utilizzare il

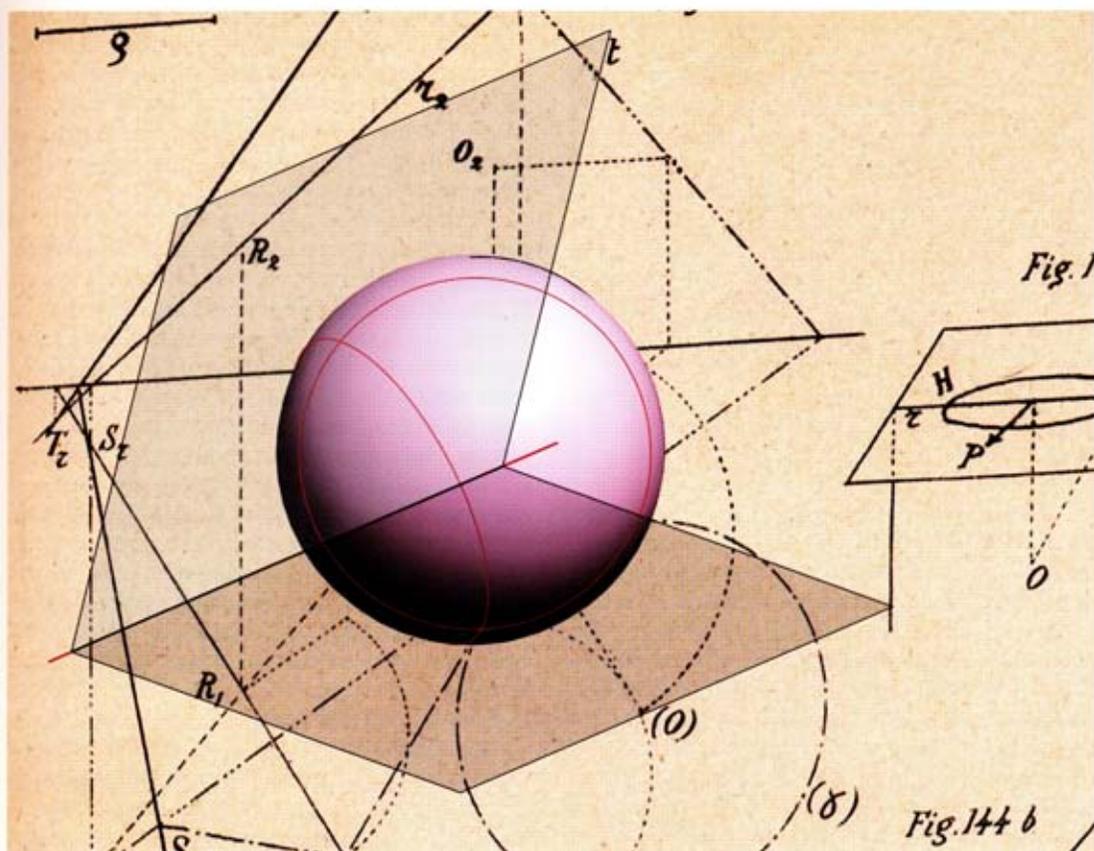
software di modellazione, di costruire nuove forme geometriche, quali sono le superfici di forma libera (NURBS), la padronanza dei formati di scambio e delle visualizzazioni dinamiche".

È evidente, dunque, che il problema deve essere affrontato a monte, e cioè prima che il flusso delle conoscenze si riversi, come deve, nella formazione. Occorre guardare alla prospettiva storica, ricondursi alla scienza viva, non ancora cristallizzata nei contenuti della disciplina, accettare l'idea di una metamorfosi, cioè l'idea di una nuova geometria descrittiva che integra, sì, il computer tra i propri strumenti, ma se ne serve senza esserne asservita. Tutto ciò può essere illustrato con un semplice esempio.

Consideriamo questo problema: costruire i piani tangenti ad una sfera che passano per una retta esterna. La soluzione tradizionale (fig. 1), condi-



2/ Costruzione dei piani tangenti ad una sfera, che passano per una retta data, per mezzo di un programma di modellazione (thinkdesign).

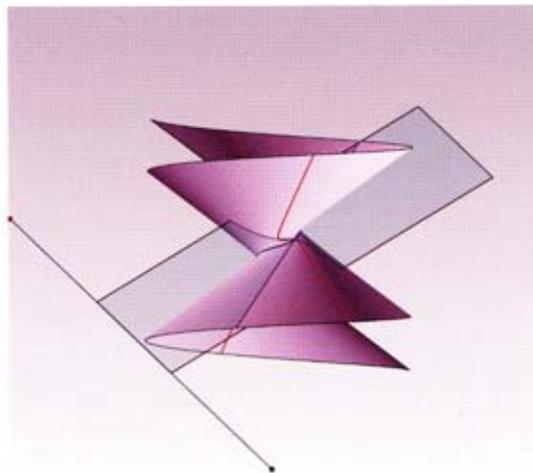


zionata dall'uso della riga e del compasso, richiede la costruzione del piano che appartiene al centro della sfera perpendicolare alla retta data, quindi la costruzione del punto e del cerchio che il piano ha in comune, rispettivamente, con la retta e con la sfera, infine la costruzione delle tangenti condotte dal punto al cerchio, le quali individuano, insieme alla retta data, i due piani tangenti richiesti.

Se ora ammettiamo l'uso di un programma di modellazione, il medesimo problema può essere risolto così (fig. 2): scelti due punti distinti sulla retta, si costruiscono i contorni apparenti della sfera rispetto all'uno e all'altro dei due punti; questi due contorni si incontrano in due punti che, insieme a quelli staccati sulla retta, definiscono due terne che

individuano i piani tangenti<sup>2</sup>. Si notino i vantaggi di questa seconda soluzione: l'immediatezza (il contorno apparente può essere costruito con un solo comando) e, soprattutto, la generalità (la soluzione è valida per qualsiasi superficie, non solo per la sfera) (fig. 3). Nella concezione, questa soluzione è ineccepibile anche nel contesto della geometria descrittiva classica, ma non è sempre applicabile, per la difficoltà di una costruzione che impiega soltanto la riga e il compasso e che porta con sé un forte errore grafico. Nella nuova geometria descrittiva, invece, l'uso di un terzo strumento, il computer, appunto, rende la costruzione non solo praticabilissima, ma sicuramente preferibile ad ogni altra per semplicità ed efficacia. In conclusione, la nuova so-

3/ La soluzione informatica, mostrata nella figura che precede, è applicabile a qualsiasi superficie.



luzione, che ho portato ad esempio, appartiene di diritto alla nostra scienza e, tuttavia, rappresenta una evoluzione della soluzione tradizionale. E poiché questo non è certamente il solo problema capace di una soluzione più semplice e generale, c'è da credere che l'intero corpus disciplinare possa essere riscritto tenendo conto degli apporti della tecnologia informatica.

Questa è, in sintesi, l'idea: *Rendiamo al CAD il suo passato, alla geometria descrittiva il suo futuro.*

Vorrei ora tornare brevemente sul carattere generalizzante della evoluzione proposta nel problema dei piani tangenti alla sfera. Credo sia utile, perché la Storia ci ha insegnato che la scienza progredisce quando trova una sola legge capace di spiegare, in modo più semplice, ciò che prima era spiegato da più leggi. In altre parole la scienza progredisce quando, appunto, generalizza. A ben vedere anche il contributo di Gaspard Monge ha soprattutto un valore generalizzante, perché riunisce in un unico codice, teorie e procedimenti già noti ma distinti (da Piero della Francesca a Frézier).

L'evoluzione degli algoritmi impiegati nella modellazione informatica ci fornisce altri esempi di questo processo. Le NURBS, ad esempio, sono espressioni capaci di rappresentare con esattezza tanto linee luogo geometrico (come le coniche<sup>3</sup>), quanto

linee grafiche, come i profili degli scafi. Ed ecco dunque una ragione in più per integrare le tecniche di modellazione informatica nel corpus disciplinare della geometria descrittiva: direi, anzi, che la generalizzazione dei procedimenti è garanzia del successo dell'operazione, nel senso che possiamo confidare in un progresso.

### *Per un nuovo manuale di geometria descrittiva*

Eppure, a tutt'oggi, i programmi delle nostre scuole sono ancora incerti nel proporre l'integrazione di questi metodi e non esiste un manuale di riferimento che possa aprire la via ad un nuovo assetto della disciplina. Forse è proprio questo, invece, l'obiettivo che dovremmo raggiungere, lavorando insieme. Perciò, nel procedere del mio discorso, cercherò di proporre un possibile riassetto della geometria descrittiva come lo si potrebbe trovare in un volume ad uso delle università.

Questo ipotetico manuale dovrebbe comprendere, a mio avviso, tre parti principali: la prima dedicata ai metodi, la seconda ai problemi fondamentali, la terza alle applicazioni.

Nella prima parte, dunque, dedicata alla descrizione degli oggetti, propongo di raccogliere insieme i metodi di rappresentazione grafica della geometria descrittiva tradizionale e i metodi di rappresentazione informatica.

Quali sono questi metodi?

Quelli classici sono, come a noi tutti è ben noto, il metodo della doppia proiezione ortogonale (o metodo di Monge che dir si voglia), il metodo della proiezione quotata, il metodo dell'assonometria e il metodo della prospettiva (intendo, con ciò, la proiezione centrale). I metodi della rappresentazione informatica sono, invece, il metodo matematico (quello della modellazione per curve e superfici NURBS e quello della modellazione solida) e il metodo numerico (quello della modellazione *mesh* o poligonale e delle superfici di suddivisione).

Prima di procedere oltre, vorrei chiarire cosa intendo dire a proposito dei metodi di modellazione informatica. Programmi di modellazione matematica, come *Rhinoceros*, *Studiotools*, *Tinkdesign*

etc., utilizzano la rappresentazione matematica (NURBS) per realizzare, nell'ambiente informatico, le operazioni tipiche della geometria descrittiva, come, ad esempio, la costruzione di superfici quadriche e rigate, di sezioni e intersezioni, del contorno apparente rispetto a un punto o a una direzione etc.. E l'operatore procede, nella costruzione del modello, esattamente come procederebbe nella costruzione di un modello grafico, mantenendo ben saldo e accurato il controllo metrico della forma. Le superfici, dunque, sono descritte, con continuità, in tutti i punti per mezzo di equazioni. Tuttavia, allo scopo di visualizzare ciò che viene costruito, questi modellatori elaborano anche una descrizione numerica (mesh) del modello. E ciò perché gli algoritmi che consentono tale visualizzazione chiara-scurata, lavorano, per interpolazione, su superfici poliedriche. Questa operazione che riduce a un poliedro la forma ideale e continua rappresentata matematicamente, è nota con il nome di tassellazione. La rappresentazione numerica, in un modellatore matematico, può dunque essere considerata un incidente senza importanza, non è certo, essa, lo scopo del lavoro di modellazione.

Al contrario, altri programmi di modellazione, come *3DStudio Max*, *Maya*, *Cinema4D*, etc., essendo orientati alla visualizzazione della forma, nei modi più completi e raffinati, tipici del rendering e delle tecniche di animazione, impiegano il modello numerico come principale oggetto di elaborazione. Non che questi programmi manchino di strumenti di modellazione matematica, li possiedono, infatti, ma solo con l'obiettivo di realizzare più rapidamente una forma che approssima quella finale e che sarà al più presto convertita in un poliedro (*editable mesh*) al fine di procedere con successive operazioni di affinamento del dettaglio. E, infatti, questi programmi mettono a disposizione dell'operatore una quantità di comandi atti a controllare facce, spigoli e vertici (si parla, appunto, di modellazione poligonale). Le procedure di modellazione, in questo caso, hanno poco o nulla a che fare con la geometria descrittiva e ricordano, piuttosto, la plastica ornamentale della vecchia scuola, quella che si faceva con il gesso o con l'argilla. Il modello numeri-

co, infatti, offre un ottimo controllo visivo della forma, ma non consente un controllo metrico efficace, proprio perché rappresenta le superfici in un numero finito e limitato di punti. Anzi, l'operatore, deve minimizzare il numero di questi punti, a vantaggio della velocità delle successive elaborazioni.

Tutto ciò premesso, l'accostamento dei metodi di rappresentazione grafica ai metodi di rappresentazione informatica può apparire arbitrario. Perché dico che il suddetto accostamento può apparire arbitrario?

Sostanzialmente perché i metodi grafici sembrano essere caratterizzati dal diverso modo di visualizzare gli oggetti della rappresentazione, mentre i metodi informatici sono indifferenti alla visualizzazione e si caratterizzano, come abbiamo visto, nel trattamento dei dati.

Ebbene, se si guarda al di là delle apparenze di una pianta, di una prospettiva o di un modello solido o di un rendering, si vede, in realtà, che *i metodi di rappresentazione si caratterizzano soprattutto per l'uso che se ne fa.*

Vorrei dire, tra parentesi, che già la descrizione operativa di Vitruvio sembra alludere a questo carattere dei metodi: l'icnografia *serve a* distribuire lo spazio, a misurare, a disporre lo spiccato dell'edificio al suolo; l'ortografia *serve a* ordinare gli alzati (e viene, operativamente, al secondo posto); la scenografia *serve ad* apprezzare l'insieme, al di fuori da ogni controllo mensorio. Ancora oggi, benché l'atteggiamento nei confronti del progetto sia profondamente mutato, le proiezioni ortogonali e la proiezione quotata hanno valenza di controllo metrico, essenzialmente, mentre l'assonometria e la prospettiva hanno valenza di controllo formale, sia esso obiettivo, legato alla giustapposizione delle masse, come soggettivo, legato alla percezione visiva dello spazio.

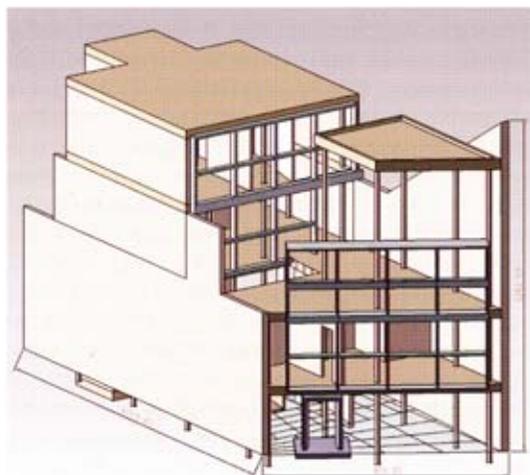
La medesima differenza si ritrova nei modelli informatici. Quale che sia la visualizzazione adottata, infatti, i modelli matematici hanno prevalente valenza di controllo metrico; mentre i modelli numerici hanno prevalente valenza di controllo formale. La modellazione NURBS e solida consente, infatti, un controllo della misura e della forma degli oggetti

4/ Esempio di rappresentazione matematica finalizzata al controllo metrico.

che trova il suo limite solo nella accuratezza della rappresentazione (fig. 4); mentre la modellazione numerica (poligonale o per superfici di suddivisione) non consente un controllo accurato della misura e della forma, ma offre, in compenso, rapidità e facilità di esecuzione e grande accuratezza nella resa chiaroscurale (fig. 5). Non è un caso, dunque, se i modelli matematici sono impiegati soprattutto nella progettazione (nell'architettura come nella produzione industriale), mentre i modelli numerici sono impiegati soprattutto nella realizzazione di effetti visivi (nel cinema come nella presentazione del progetto).

E non è neppure un caso se un aspetto ancora problematico del rilievo a scansione laser sta proprio nell'uso di un modello numerico (la nuvola di punti o la *mesh* da essa derivata) laddove necessiterebbe, invece, un modello matematico e gli elaborati, anche grafici, che da esso si possono derivare. Cosicché il passaggio dal modello numerico al modello matematico, il cosiddetto *reverse modeling*, è oggi, di fatto, uno dei problemi centrali della rappresentazione<sup>4</sup>.

Da ultimo, vorrei ricordare che, anche nella modellazione informatica, si fa uso soprattutto di proiezioni parallele, quando si lavora con la matematica, mentre quando si lavora sulle *mesh* o sulle superfici di suddivisione prevale la proiezione centrale.



5/ Esempio di rappresentazione numerica finalizzata al controllo formale.

Sussistono, poi, forti analogie tra metodi grafici e metodi informatici che confortano ulteriormente l'idea di comporli insieme.

In primo luogo, quale che sia il metodo adottato, i dati si dispongono progressivamente nello spazio rappresentato e progressivamente delineano, o, per meglio dire, descrivono la forma oggetto della rappresentazione. La visualizzazione della forma è una conseguenza automatica di questo processo, nell'universo grafico come in quello informatico. E ancora una volta dobbiamo riconoscere quanto la vecchia classificazione dei metodi fondata sulle caratteristiche dell'immagine (doppia, semplice, prospettica) sia meramente convenzionale, per non dire, in certa misura, fuorviante.

In secondo luogo, sono analoghe le procedure della costruzione: nell'universo grafico, come in quello informatico, le entità tridimensionali si costruiscono a partire da entità bidimensionali disposte su un piano (di volta in volta detto piano di costruzione, piano di lavoro, etc.). Questo piano è, nel modello grafico, il piano di proiezione, che coincide con il foglio da disegno. Quando occorre, una operazione detta 'raddrizzamento' (inversa del ribaltamento) consente di collocare la vera forma disegnata sul piano di proiezione nello spazio. Oppure un'altra operazione, detta 'cambiamento dei piani di proiezione', consente di disporre il piano di



proiezione nello spazio, nella posizione richiesta dalla costruzione.

Nel modello informatico c'è maggiore libertà di azione perché si può procedere come nel modello grafico, ma si può anche muovere il piano di costruzione nello spazio, indipendentemente dal piano di proiezione, cioè dalla veduta del modello, e in ultima analisi, indipendentemente dal disegno.

In terzo luogo, analoghe, anzi, identiche sono le soluzioni geometriche dei problemi, fatta salva la possibilità di seguire procedure più efficienti, come ho mostrato con l'esempio dei piani tangenti alla sfera. Ad esempio, la semplice misura dell'angolo di pendio di un piano esige la costruzione di una retta di massima pendenza; esige, perciò, una procedura squisitamente geometrico descrittiva che è quella che insegnano i vecchi manuali dell'ottocento quale che sia il contesto, grafico o informatico.

Infine occorre una breve riflessione sul lessico della nuova geometria descrittiva. In attesa che i produttori dei vari programmi commerciali si decidano una buona volta a unificare la terminologia, possibilmente adeguandola ai termini consolidati e corretti usati nella letteratura sull'argomento, almeno da un paio di secoli, occorre definire un vocabolo che sappia indicare, indifferentemente, il metodo grafico come quello informatico.

Il termine 'proiezione' (doppia proiezione, proiezione assonometrica, proiezione centrale) confligge, come abbiamo visto, con la definizione del metodo informatico che è avulsa dalla vista adottata. La parola 'modello', dal canto suo si presta male ad essere coniugata nei modi della rappresentazione grafica: ad esempio, bisognerebbe dire 'modello in doppia proiezione ortogonale'. La parola che, invece, secondo me, si presta meglio a questo uso generalizzato è ancora 'rappresentazione'. I metodi della geometria descrittiva, perciò, sono quelli della *rappresentazione in pianta e alzato*, della *rappresentazione quotata*, della *rappresentazione assonometrica*, della *rappresentazione prospettica*, della *rappresentazione matematica* e della *rappresentazione numerica*.

In conclusione, dunque, io credo che la prima parte di un nuovo manuale di geometria descrittiva e

delle sue applicazioni, potrebbe essere articolata come nel diagramma complessivo dei contenuti, che riporto in figura (fig. 6).

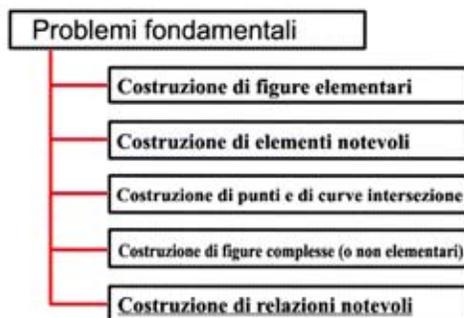
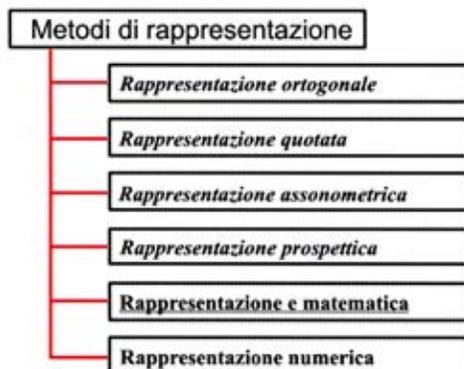
La seconda parte del nostro ipotetico manuale è quella dedicata ai problemi della geometria descrittiva e alle relative soluzioni. Come abbiamo visto in alcuni esempi, queste soluzioni possono grandemente avvantaggiarsi dell'uso dei modellatori informatici.

Sorge dunque una questione di non poca difficoltà: è lecito l'uso di questi strumenti nella geometria descrittiva? La domanda non è banale, perché se la risposta dovesse essere negativa, allora non avrebbe senso il mio sforzo di integrare le tecniche di modellazione informatica nella disciplina classica. Se, al contrario, la risposta è 'ebbene sì, è lecito', allora l'integrazione di cui parlo diventa quasi un obbligo morale per chi ancora si occupa di questi studi.

Consideriamo allora, brevemente, la questione della classificazione dei problemi della geometria, questione antica, efficacemente riassunta da Guido Castelnuovo nel suo manuale di geometria analitica e proiettiva<sup>5</sup>. In breve: esistono problemi che si possono risolvere con la riga ed il compasso e problemi che non si possono risolvere con la riga ed il compasso. Questi ultimi, evidentemente, non sono risolvibili neppure nell'ambito della geometria descrittiva. Ad esempio: non si può costruire un poligono regolare di sette lati, non si può rettificare la circonferenza, etc.

Perciò, in teoria, la geometria descrittiva non può rappresentare un prisma o una piramide che abbia come base un ettagono. Eppure esiste una costruzione geometrica approssimata dell'ettagono<sup>6</sup> e si può benissimo dividere in sette la lunghezza di una circonferenza calcolata usando il pi greco. Tutto sta ad accettare il calcolo e, se necessario, le approssimazioni che ne conseguono. D'altronde la geometria descrittiva non è nata nell'empireo della matematica, ma, invece, nel 'volgare' mondo dell'arte. Piero della Francesca la usa per costruire i suoi spazi eterei e luminosi e Gaspard Monge per costruire cannoni. In entrambi i casi, i risultati che la geometria descrittiva fornisce sono affetti da un errore grafico e questo errore è tacitamente accettato.

6/ Schema dei contenuti di un nuovo manuale di *fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*. Gli argomenti scritti in corsivo sono quelli trattati con metodi grafici; gli argomenti scritti con carattere sottolineato sono quelli trattati con metodi informatici o che traggono vantaggio da questo tipo di elaborazione; gli altri argomenti in tondo sono trattati in entrambi i modi.



Ora, come sappiamo, il computer costruisce all'istante rette e cerchi (i mezzi canonici della costruzione geometrica) ma anche ellissi, parabole, iperboli e molte altre entità geometriche. Tutte queste figure sono approssimate, anche se la tolleranza è molto, molto più piccola di quella accettata nel disegno. Perché, allora, non dovrebbe essere lecito usare queste entità nella soluzione dei problemi della geometria descrittiva?

Accettata, perciò, l'introduzione di questo nuovo strumento, sorge una seconda questione: quali problemi saranno ancora risolti per via grafica, almeno nell'esercizio accademico, e quali per via informatica? Questa scelta, secondo me, deve essere lasciata ai docenti, in piena libertà. Vi sono, infatti, contesti, come quello delle facoltà di ingegneria, nei quali la trattazione grafica dei problemi della geometria descrittiva potrebbe essere ridotta al minimo o eliminata, e contesti, come quelli delle facoltà di art design, nei quali, evidentemente, la trattazione grafica è preponderante. In mezzo a questi due estremi sta una serie infinita di variazioni, in fatto di contenuti come anche in fatto di approfondimenti. Una cosa è certa: la geometria descrittiva, intesa come corpus disciplinare, deve comprendere ogni possibile soluzione, sia grafica che informatica.

Stabilito ciò, c'è un'ultima questione da affrontare. Molti dei problemi della geometria descrittiva trovano nell'ambiente informatico e, in particolare, nella rappresentazione matematica, una soluzione immediata, cioè programmata<sup>7</sup>. Molti altri, invece, debbono essere risolti con procedure complesse analoghe a quelle delle rappresentazioni grafiche. Con una accettabile approssimazione possiamo dire che, allo stato dell'arte, come si è andata consolidando negli ultimi vent'anni, i problemi che trovano in ambiente informatico una soluzione immediata sono: la costruzione di alcune forme elementari, dette 'primitive' e la soluzione dei problemi elementari di perpendicolarità, tangenza e intersezione, ivi comprendendo la costruzione delle linee isofote e perciò anche del contorno apparente. Il termine 'primitive', che fa parte, appunto, del nuovo lessico informatico, sta ad indicare, impropriamente, quelle forme che non sono derivate da altre.

In conclusione, il computer può essere visto come uno strumento analogo alla riga e al compasso, ma capace di:

- costruire, oltre alla retta e al cerchio, anche l'ellisse, la parabola, l'iperbole, la sfera, il cono, il cilindro, il toro, e le rigate a piano direttore;
- costruire, oltre alle rette mutuamente perpendicolari, la retta tangente ad una curva in un punto dato, la retta perpendicolare ad una curva in un punto dato, il piano tangente ad una superficie in un punto dato, la retta perpendicolare ad una superficie in un punto dato, il contorno apparente di una superficie rispetto ad un centro di proiezione (proprio o improprio).

Partendo da questa considerazione, è possibile abbozzare una classificazione dei problemi tipici della geometria descrittiva, per distinguere, come si è detto, quelli che trovano nell'ambiente informatico una soluzione immediata da quelli che necessitano di considerazioni e procedure articolate, quale che sia il metodo di rappresentazione adottato.

Lo scopo di questa classificazione è duplice.

Da un lato consente di raggruppare i problemi che debbono essere studiati in ogni caso, e cioè sia che si faccia affidamento sul computer, sia che ci si affidi solo alle tecniche grafiche tradizionali. Infatti, la soluzione di questi problemi, che consiste in una successione di operazioni da compiere nello spazio, non si può ottenere senza un ragionamento fondato sulle logiche e sulle tecniche della geometria descrittiva.

Dall'altro lato, la classificazione proposta, consente di raggruppare i problemi che conviene trattare nel modo tradizionale. Infatti, la loro soluzione informatica è banale, appunto perché programmata, e rientra nell'altrettanto banale addestramento all'uso del software. Mentre la soluzione grafica, nella sua chiarezza e semplicità, giustifica le soluzioni informatiche e al tempo stesso introduce all'esercizio di quella logica e di quelle tecniche che ho prima richiamato e che sono a fondamento delle soluzioni complesse del gruppo che precede.

In sintesi, questa classificazione potrebbe mettere in evidenza i problemi che costituiscono l'abbeccedario grafico dello studente architetto, ingegnere o

designer: quel libro sul quale si impara a scrivere senza uso di macchine e soprattutto si impara a leggere i disegni. E permetterebbe anche di capire quali problemi, dimenticati da tempo per la loro complessità, possono oggi essere riproposti grazie all'aiuto dei mezzi informatici.

Da ultimo, bisogna considerare il vasto orizzonte delle applicazioni della geometria descrittiva nelle quali includo, anche se un po' impropriamente, lo studio delle curve e delle superfici che costituisce parte notevolissima di ogni trattato del secolo scorso. Queste applicazioni comprendono per consolidata tradizione: la teoria e le applicazioni delle ombre e del chiaroscuro, lo studio dei poliedri, la stereotomia, ovvero il taglio delle pietre e dei legnami, il disegno (ma bisognerebbe dire il progetto) degli ingranaggi, il disegno dell'ordine architettonico e la prospettiva (piana e solida).

Ebbene, l'inclusione dei metodi matematico e numerico tra i metodi di descrizione della forma, porta alla nascita di nuove applicazioni, proprie dei metodi di rappresentazione informatica, come sono, ad esempio, le tecniche che consentono di imporre continuità alle superfici, ma porta, altresì, all'arricchimento delle applicazioni tradizionali con esperienze del tutto nuove. Non occorrerà che io mi dilunghi portando esempi, perché queste esperienze sono apparse talmente numerose, da qualche anno a questa parte, nei volumi, nei saggi, nelle comunicazioni a convegni presentate da molti colleghi in occasioni e contesti diversi, che non è qui possibile ricordarle tutte.

Ad esempio, il disegno dell'ordine architettonico si è arricchito di verifiche prima quasi impensabili, come hanno dimostrato le ricostruzioni della Basilica di Vitruvio<sup>8</sup>, dei progetti di Palladio<sup>9</sup>, o anche la modellazione tridimensionale dei capitelli ionici teorizzati dai trattatisti e la scoperta di anomale intersezioni che si ritrovano, infatti, corrette, nei capitelli realizzati<sup>10</sup>.

Alla teoria delle ombre e del chiaroscuro sono stati aggiunti tutti quegli effetti della luce sui corpi che, nel passato, venivano soltanto descritti nelle linee generali e poi imitati dal vero, per la difficoltà di rappresentarli attraverso costruzioni grafiche. Mi

7/ *Rappresentazione matematica di un poliedro geodetico a n facce, derivato per suddivisione dall'isosaedro.*

riferisco, ad esempio, alla penombra, ai punti brillanti, e, soprattutto ai riflessi e alla luce diffusa.

Allo studio dei poliedri possono essere aggiunte quelle forme che, pur avendo un alto interesse per l'architettura e per l'ingegneria, erano ostiche alla matita, come le cupole geodetiche di frequenza superiore e i poliedri tronchi o stellati con un numero elevato di facce (fig. 7).

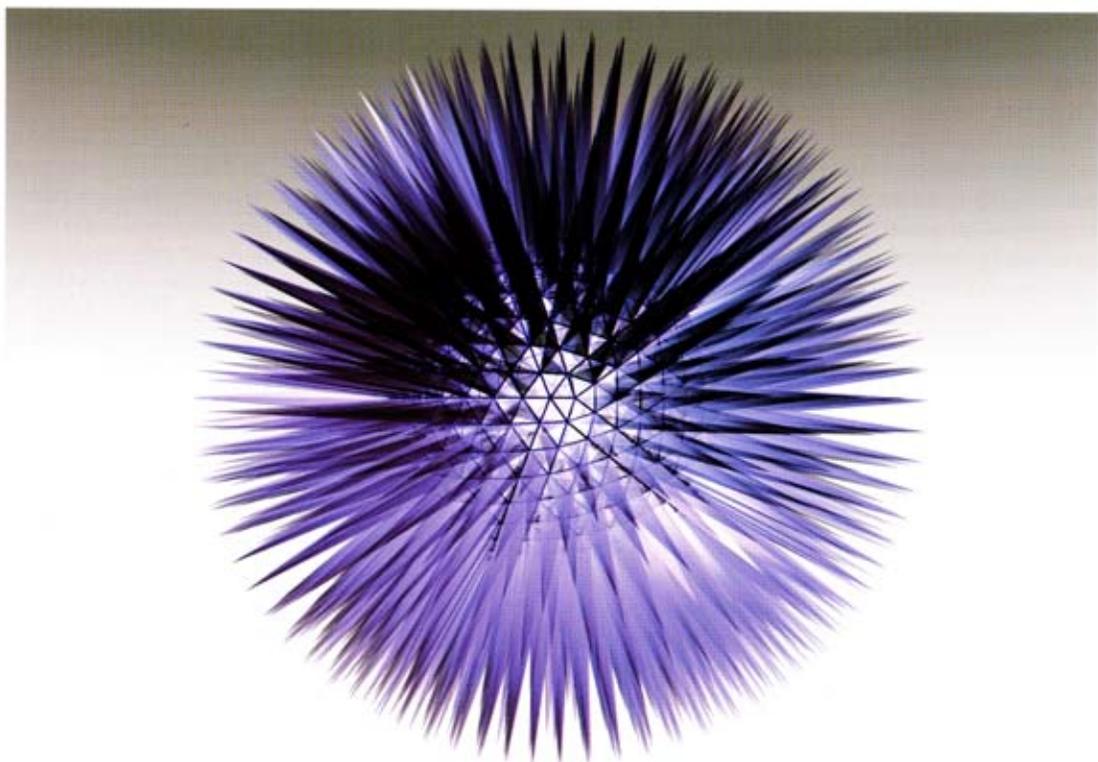
Il taglio delle pietre e dei legnami è stato condotto applicando al modello quelle lavorazioni, nel senso proprio del termine, che la modellazione solida permette di simulare con cura<sup>11</sup>. Penso alla realizzazione di tasche, smussi, raccordi e così via.

Infine la prospettiva solida permette di dare corpo tridimensionale a trasformazioni proiettive, come quelle delle quadriche, che prima si potevano solo immaginare. Naturalmente l'elenco potrebbe continuare<sup>12</sup>, ma non è questo il mio scopo.

Vorrei però far notare come le rappresentazioni informatiche si facciano strumento privilegiato nello studio di queste applicazioni: in particolare le rappresentazioni matematiche, in tutto ciò che attiene alle superfici e ai solidi (fig. 8); le rappresentazioni numeriche in tutto ciò che attiene alla luce e alla rappresentazione di forme naturali, come le superfici topografiche.

Se ora immaginiamo un volume che raccolga insieme la trattazione degli argomenti cui ho brevemente accennato e, cioè, i metodi, i problemi e le applicazioni, ci appare chiara la mole e la vastità dell'impresa. Un'impresa che, molto probabilmente, non può essere condotta a termine da uno solo ma da un gruppo di ricercatori.

Appare anche evidente che il contenuto di questo manuale non potrà mai costituire per intero la materia di insegnamento di uno dei nostri corsi uni-



## 8/ Rappresentazione di una superficie algebrica.



versitari, già penalizzati dalle riforme che si sono succedute negli ultimi anni e ormai ridotti a poche ore. Il manuale che io ipotizzo (e auspico al tempo stesso) potrebbe costituire al più un mezzo di consultazione. Che cosa si potrebbe, allora, estrarre dai contenuti per proporlo nell'insegnamento?

Come ho già detto, secondo me, questa selezione potrebbe e dovrebbe variare in funzione del corso di laurea. Ma alcuni paragrafi potrebbero restare comuni a tutti.

Mi riferisco, in particolare, ai problemi della geometria descrittiva. Questi problemi, oggi, sono qua-

si scomparsi, eppure costituivano un tempo la parte preponderante dei corsi, quella palestra di esercizi che, consolidando la teoria nella pratica, irrobustiva la capacità mentale di prefigurare lo spazio e i suoi modelli, capacità essenziale, come sappiamo, nella formazione di un progettista.

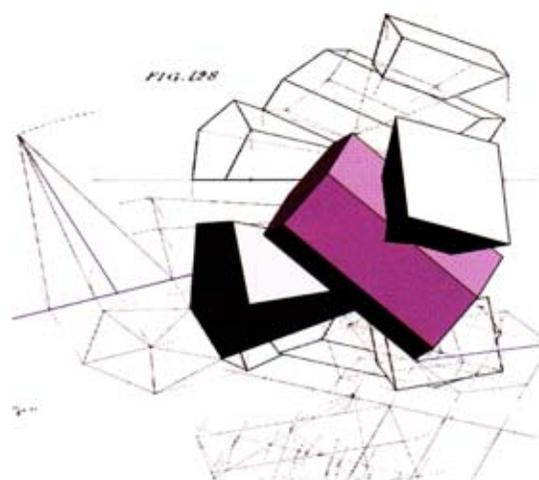
Oggi invece, il tempo tiranno costringe a scelte radicali: limitarsi ai fondamenti teorici dei metodi di rappresentazione grafica se si vuole anche accennare ai metodi informatici; oppure limitarsi ai metodi grafici e a qualche sparuta applicazione lasciando ad altri (ma a chi?) il compito di introdurre all'uso del computer; oppure (questa, secondo me, la peggiore tra le scelte possibili) insegnare l'uso dei comandi di questo o quel software, come fanno, purtroppo, tanti giovani professori a contratto catapultati in cattedra senza una scuola, una vera scuola, alle spalle.

Pensiamo, ora, per un momento, le vecchie tavole, quelle con la linea di terra, per intenderci, e i ribaltamenti e l'omologia e immaginiamo di sviluppare, però, questi problemi al computer, in tre dimensioni. Ad esempio, e per rendere l'idea, immaginiamo di prendere le mille tavole pazientemente incise da Fausto Vagnetti<sup>13</sup> per rifare i medesimi esercizi di composizione di solidi (fig. 9), oppure le tavole di Giambattista Berti<sup>14</sup> o Domenico Tessari<sup>15</sup>, per rifare i medesimi chiaro-scuro (fig. 10), oppure ancora uno degli innumerevoli eserciziari francesi<sup>16</sup> scritti tra fine Ottocento e primo Novecento per preparare gli studenti al 'baccalauréat', come agli esami del politecnico, e vedremo che la geometria descrittiva ritroverà intatta tutta la sua capacità di intrigare, di incuriosire, di appassionare e, perciò anche, di formare.

#### Note

<sup>1</sup> Infine occorre citare quegli Autori che, in tempi più prossimi, hanno in vario modo denunciato l'esigenza del rinnovamento della geometria descrittiva, in quanto scienza, anche al di fuori dei problemi e delle logiche della formazione: M. Earl (2001), *The New Descriptive Geometry*, Baltimore AIA Second Annual Winter Technology-in-Design Seminar, University of Baltimore 's Thumel Business Center, Saturday, February 17, 2001; Merta H. Sulwinski S. (2005), *New Descriptive Geometry or Computer Geometry?*, International Conference on Engineering Education ICEE 2005 "Global Education Interlink", Silesian University of Technology, Gliwice, July 2005; Vicario López, J.

9/ Trascrizione in rappresentazione matematica di uno degli esercizi trattati da Fausto Vagnetti.



10/ Trascrizione in rappresentazione numerica di una delle tavole di Domenico Tessari.

Ocaña López R. Merino Egea, M. Recio Díaz, M. Lorca Hernando, P. J. (2005), *Dibujo tridimensional: un nuevo enfoque de la geometría descriptiva?*, Congreso internacional conjunto XVII ingegra - XV adm, 2005. Kozniewski E. (2005), *New Methods of the Computer Aided Design of Roofs in: Descriptive Geometry*, International Conference on Engineering Education ICEE 2005 "Global Education Interlink", Silesian University of Technology, Gliwice, July 2005.

<sup>2</sup> Questa soluzione viene proposta e praticata, nei testi classici, limitatamente al caso della sfera. Si vedano ad esempio i manuali dei gesuiti di scuola francese.

<sup>3</sup> Cfr. Piegl L. Tiller W., *The NURBS Book*, Springer, Berlino 1997.

<sup>4</sup> Cfr. C. Trevisan, *Proporzioni e vera forma di particolari architettonici rilevati con scanner 3D: caratteristiche di un software specifico*, Disegnare, idee immagini, vol. 24, Roma 2002 e M. Galani (a cura di), *La rappresentazione riconfigurata*, Milano 2006

<sup>5</sup> Cfr. Castelnuovo G., *Lezioni di geometria analitica*,



Società Editrice Dante Alighieri, Città di Castello 1969. L'edizione consultata è la sedicesima di un'opera nata nel 1903 e contiene una importante appendice storica dedicata ai problemi della geometria elementare, alla loro classificazione e risolubilità per mezzo della riga, del compasso e di altri strumenti, reali, come la riga a due orli, o del tutto teorici. In tal modo Castelnuovo rende conto di una ricerca antichissima, che muove dal problema di Delo per approdare alla costruibilità dei poligoni regolari e ai relativi teoremi di Gauss.

<sup>6</sup> Ignaro del problema, Girolamo Crescenzi Serlupi propone, nel suo trattatello di *Pratica di geometria in carta e in campo* (Roma 1746) una costruzione assai semplice. Se questo ettagono, approssimato, viene inscritto in una circonferenza di raggio 1000, il suo lato risulta lungo 866,0254. Il medesimo ettagono, costruito ricorrendo al calcolo, mostra sette lati, apparentemente eguali, lunghi 867,7675. Dunque, la costruzione grafica di Serlupi è affetta da un errore pari al 2 per mille, circa.

<sup>7</sup> I problemi che trovano nell'ambiente informatico una soluzione immediata sono molti, ma non tutti. Credo non vi sia dubbio circa il fatto che vi saranno sempre problemi non programmati, dal momento che il loro numero è infinito. Ci si potrebbe allora interrogare su quali siano le operazioni minime e indispensabili che un computer deve poter eseguire per rappresentare lo spazio. Io credo, a riguardo, che un computer in grado di tracciare, nello spazio, una retta e un cerchio, potrebbe essere usato per risolvere tutti i problemi della geometria descrittiva, dal momento che offrirebbe i medesimi strumenti che erano disponibili prima dell'era informatica: la riga e il compasso.

<sup>8</sup> Cfr. Mezzetti C. Clini P. Taus P., *L'architetto Vitruvio e la Basilica di Fano. Segni e disegni di un'opera unica*, Disegnare, idee immagini, vol. 11, Roma 1995.

<sup>9</sup> Cfr. Burns H. Beltramini G. Gaiani M. (a cura di), *Andrea Palladio. Le ville*, CD Rom, Vicenza 1997.

<sup>10</sup> Cfr. Migliari R., Angelini B., *Il capitello ionico classico e gli esiti inaspettati di un suo modello numerico*, Disegnare, idee immagini, vol. 17, Roma 1998.

<sup>11</sup> Cfr. De Carlo L., *Geometria del pensiero costruttivo nel trattato di stereotomia di Alonso de Vandelvira*, Disegnare, idee immagini, vol. 28, Roma 2004; D'Amato C. Fallacara G. (a cura di), *L'arte della stereotomia: i Compagnons du devoir e le meraviglie della costruzione in pietra*, Parigi 2005.

<sup>12</sup> Avrei voluto qui citare molti altri saggi e molte tesi di dottorato che ho impresse nella mente, ma non mi è possibile. Chiedo scusa agli Autori, che di certo si riconosceranno nei temi ai quali ho fatto cenno.

<sup>13</sup> Fausto Vagnetti, padre di Luigi, insegnò in varie scuole romane: presso la Facoltà di Ingegneria (Disegno Architettonico e Ornato, tra il 1908 e il 1921); presso l'Istituto di Belle Arti (Figura Disegnata, tra il 1912 e il 1942); al Museo Artistico e Industriale (Prospettiva e Scenografia, tra il 1912 e il 1925); infine alla nuova Facoltà di Architettura (Disegno dal Vero, dal 1920 al 1950). Tra il 1946 e il 1948, Vagnetti preparò un manuale di geometria descrittiva dal

titolo *Elementi di Scienza del Disegno*. Questo manuale è stato pubblicato in tre volumi, in seconda edizione, tra il 1964 e il 1972, come spiega l'Editore nella premessa. L'opera comprende oltre cento tavole sciolte, che ospitano innumerevoli figure e costituiscono un prezioso repertorio di quegli esercizi che costituivano il banco di prova della geometria descrittiva nelle scuole, da quelle secondarie fino alle università, prima delle trasformazioni che hanno portato alla situazione attuale.

<sup>14</sup> Giambattista Berti, architetto vicentino, è autore di opere dedicate al disegno dell'ordine architettonico illustrate al tratto e al chiaroscuro: *Studio elementare degli ordini di architettura di Andrea Palladio* (1818); *Viola illustrata* (1822 e 1839); *Delle Ombre e del Chiaro-Scuro in Architettura geometrica* (1841).

<sup>15</sup> Domenico Tessari (1837 - 1909), Professore di Cinematica applicata alle macchine nel Politecnico di Torino è autore del più esaustivo ed importante trattato ottocentesco sulla *Teoria delle ombre e del chiaro-scuro* (Torino, 1880).

<sup>16</sup> Ad esempio, *Éléments de Géométrie descriptive avec nombreux exercices*, di F.J., Tours, Paris 1893. Era costume dei gesuiti, credo in segno di umiltà, firmare le proprie opere con le iniziali del loro superiore. L'Autore potrebbe essere, perciò, Frère Gabriel Marie (al secolo Edmond BRUNHES), che nel medesimo anno 1893 pubblicò, con il medesimo pseudonimo e presso il medesimo editore, la terza edizione del suo *Exercices de Géométrie*, una raccolta di oltre duemilacinquecento questioni geometriche, commentate anche dal punto di vista storico, che è stata riprodotta in edizione anastatica da Jaques Gabay nel 1991. Vedi, anche, *Éléments de Géométrie descriptive à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire et aux écoles du gouvernement*, di H. Ferval, pubblicato a Paigì nel 1907.

## Riferimenti bibliografici

Gli elenchi che seguono non sono certo esaustivi, debbono essere considerati soltanto come riferimenti utili in un primo approccio al problema.

### Saggi e relazioni

- Jiannan C., *Kernel Problems of the Modernization of Engineering Graphics Education*, Journal for Geometry and Graphics, 1998,
- Fava de Oliveira V. Borges M.M. Naveiro R.M., *The improvement of the learning process of basic disciplines at the engineering design*, International Conference On Engineering Education, Rio de Janeiro 1998;
- Texeira F. Silva R. Silva T., *A Learning Environment Hypermedia for the Teaching of Descriptive Geometry*, ICEE 1999,
- Santos E.T. Rojas Sola J.I., *An on-line library of descriptive Geometry problems*, Johannesburg 2000,
- Pütz C., *Descriptive Geometry Courses for Students of*

- Architecture – On the Selection of Topics*, Journal for Geometry and Graphics 2000;
- Cabezas M. Mariano C. Oliva G. Oliva S., *New technologies applied to training evaluation of a new teaching methodology for the descriptive geometry*, ECAADE – Education For Computer Aided Architectural Design In Europe, Helsinki 2001;
  - Earl M., *The New Descriptive Geometry*, Baltimore AIA Second Annual Winter Technology-in-Design Seminar, University of Baltimore 's Thumel Business Center, Saturday, February 17, 2001;
  - Schreiber P., *Generalized Descriptive Geometry*, Journal for Geometry and Graphics 2002;
  - Ivanov G. S., *The History and Perspectives of the Development of Applied Geometry in Russia*, Journal for Geometry and Graphics 2002;
  - Cornelle L., *Principles of a Geometry Program for Architecture — Experiences, Examples, and Evaluations*, Journal for Geometry and Graphics 07, 2003;
  - Štulić R.B. Atanacković J., *Implementation of computer technologies in descriptive geometry teaching: surfaces of revolution*, Architecture and Civil Engineering Vol. 2, No 5, 2003;
  - Schmitt F., *Aspects of Using 3D-CAD (AutoCAD2005) Teaching Descriptive Geometry to Students of Architecture*, ICEE 2005;
  - Kozniński E., *New Methods of the Computer Aided Design of Roofs in Descriptive Geometry*, International Conference on Engineering Education ICEE 2005 "Global Education Interlink", Silesian University of Technology, Gliwice, July 2005;
  - Cyuñel C. Marcin J. Romaniak K., *Descriptive Geometry in Basis of the Technical Designing*, International Conference on Engineering Education ICEE 2005 "Global Education Interlink", Silesian University of Technology, Gliwice, July 2005;
  - Merta H. Sulwinski S., *New Descriptive Geometry or Computer Geometry?*, International Conference on Engineering Education ICEE 2005 "Global Education Interlink", Silesian University of Technology, Gliwice, July 2005;
  - Schmitt F., *Aspects of Using 3D-CAD (AutoCAD2005) Teaching Descriptive Geometry to Students of Architecture*, International Conference on Engineering Education ICEE 2005 "Global Education Interlink", Silesian University of Technology, Gliwice, July 2005;
  - Vicario López, J. Ocaña López R. Merino Egea, M. Recio Díaz, M. Lorca Hernando, P. J., *Dibujo tridimensional: ¿un nuevo enfoque de la geometría descriptiva?*, Congreso internacional conjunto xvii ingegrat – xv adm, 2005.
- Manuali esplicitamente mirati ad una integrazione dei metodi informatici con i metodi classici della Gd:*
- Standiford K. Standiford D., *Descriptive Geometry, An Integrated Approach Usign AutoCAD*, USA 2005;
- Università e scuole superiori che sperimentano il rinnovamento degli studi e dell'insegnamento della geometria descrittiva:*
- Institut für Geometrie und Praktische Mathematik della Rheinisch Westfälische Technische Hochschule di Aachen, Germania;
  - University of Miskolc, Department of Descriptive Geometry, Ungheria;
  - Université Laval (Canada);
  - Istituto Victor Horta a Bruxelles.